Différentiabilité de l'exponentielle de matrices

Théorème 1. *Pour* $X, H \in M_n(\mathbb{K})$, $d_X \exp(H) = e^X \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad\, X)^k}{(k+1)!} H$, *où* $ad\, X(H) = XH - HX$.

Démonstration.

Soient $X, H \in M_n(\mathbb{K})$.

(i) Tout d'abord, résolvons les deux problèmes de Cauchy suivant, pour $A \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} f'(t) & = & Af(t) \\ f(0) & = & H \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad S_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} g'(t) & = & e^{tA}H \\ g(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Le premier système entraîne :

$$(e^{-tA}f(t))' = e^{-tA}f'(t) - e^{-tA}Af(t) = 0$$

Donc $e^{-tA}f(t) = e^0 f(0) = H$, puis $f(t) = e^{tA}H$. La réciproque est immédiate.

Maintenant, pour obtenir g, on doit intégrer terme à terme la série de l'exponentielle, d'où :

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}A^k}{(k+1)!} \right) H$$

En effet, les fonctions des deux membres ont même dérivée et s'annulent toutes deux en 0.

(ii) On pose ici $ad\, X(H) = XH - HX$, et $f(t) = e^{tX}He^{-tX}$.
Alors $f'(t) = Xe^{tX}He^{-tX} - e^{tX}He^{-tX}X = ad\, X(f(t))$ et $f(0) = H$, donc $f(t) = e^{t\, ad\, X}H$.
Pour $t = 1$, on obtient $e^X He^{-X} = e^{ad\, X}H$.

(iii) Soit maintenant la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \partial_{u=0} \left(e^{-tX}e^{t(X+uH)} \right) \end{array} \right.$, où u est une variable réelle.
On remarque que $g(0) = \partial_{u=0}(e^0 e^0) = 0$.
De plus, comme exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors il en est de même pour :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (t,u) & \longmapsto & e^{-tX}e^{t(X+uH)} \end{array} \right.$$

Par le théorème de Schwarz, on peut donc permuter les dérivées secondes, d'où :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0} \left(e^{-tX}e^{t(X+uH)} \right) \\ &= \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tX}e^{t(X+uH)} \right) \\ &= \partial_{u=0} \left(-e^{-tX}Xe^{t(X+uH)} + e^{-tX}(X+uH)e^{t(X+uH)} \right) \\ &= \partial_{u=0} \left(ue^{-tX}He^{t(x+uH)} \right) \\ &= e^{-tX}He^{tX} \\ &= e^{-t\, ad\, X}H \end{aligned}$$

(iv) On sait que $g(0) = 0$ et que $g'(t) = e^{-t\, ad\, X} H$, alors :

$$g(t) = \partial_{u=0} \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}(-ad\, X)^k}{(k+1)!} \right) H$$

En prenant $t = 1$, on obtient :

$$g(1) = \partial_{u=0} \left(e^{-X} e^{X+uH} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad\, X)^k}{(k+1)!} \right) H$$

Mais comme exp est différentiable en X, on a par ailleurs :

$$\partial_{u=0} \left(e^{-X} e^{X+uH} \right) = e^{-X} d_X \exp(H)$$

Finalement :

$$d_X \exp(H) = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad\, X)^k}{(k+1)!} H$$

$\square$

Conclusion. Pour $X, H \in M_n(\mathbb{K})$, $d_X \exp(H) = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad\, X)^k}{(k+1)!} H$, où $ad\, X(H) = XH - HX$. $\triangleleft$

Références

[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini